

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
Деснянский В.Н. Деснянский
«22» каждого 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 1

Задание №1

Поезд идет со скоростью 108 км/час. Пассажир этого поезда, сидящий у окна, видит в течение 18 секунд встречный поезд, длина которого 900 метров. Какова скорость встречного поезда в км/час?

Задание №2

Не пользуясь калькулятором определить какое число больше:

e^π или π^e , где e – основание натуральных логарифмов.

Ответ обосновать.

Задание №3

Решить уравнение:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_5 x = \log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_5 x + \log_2 x \cdot \log_5 x$$

Задание №4

Найти площадь фигуры, заданной соотношением:

$$|y - 1| + |x - 2| = 2$$

Задание №5

Решить в целых числах уравнение:

$$(x - 1)^2(y^2 + 1) + (y^2 + 1) = 4y|x - 1|$$

Задание №6

Вычислить:

$$\arctg 2 + \arctg 3$$

Задание №7

В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Известно, что угол BEA=45°.

Найти в градусах угол EHC.

Задание №8

Решить неравенство:

$$\frac{\log_7(19 - 16x \cdot |x|) - \log_{49}(1 - 4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \leq 0$$

Задание №9

Для всех значений параметра a решить неравенство:

$$|x - a^2| \leq 1 - |2a - 2 - x|$$

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«18» ноября 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы**

Вариант 1

Задание №1

В качестве измерения времени возьмем минуту, скорость будем измерять в км/мин. Тогда $18 \text{ сек} = \frac{18}{60} = 0,3 \text{ мин.}$

Скорость $108 \frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{108}{60} = 1,8 \text{ км/мин.}$ Обозначим скорость встречного поезда $x \text{ км/мин.}$ По условиям задачи получим равенство:

$$0,3 \cdot 1,8 + x \cdot 0,3 = 0,9$$

Отсюда $x = \frac{0,36}{0,3} = 1,2 \text{ км/мин.}$ А тогда скорость в км/час будет:

$$1,2 \cdot 60 = 72 \text{ км/час}$$

Ответ: 72 км/час

Задание №2

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Эта функция определена при $x > 0$ и имеет наибольшее значение при $x = e$. Значит $f(\pi) < f(e)$ или $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Rightarrow e^\pi$.

Ответ: первое число больше

Задание №3

Данное уравнение можно записать в виде: $abc = ab + ac + bc$, где $a = \log_{\frac{1}{2}} x$, $b = \log_2 x$, $c = \log_5 x$.

Разделив уравнение на левую часть, получим:

$$1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} \Leftrightarrow 1 = \log_x 5 + \log_x 2 + \log_x \frac{1}{2} = \\ = \log_x 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \log_x 5$$

Отсюда $x = 5$. Заметим, что $x = 1$ также корень этого уравнения.

Ответ: {1; 5}

Задание №4

Сделаем замену $x - 2 = X$, $y - 1 = Y$. Тогда в новой системе координат центр будет в точке (2; 1). Область $|X| + |Y| = 2$ будет симметрична по двум осям и представлять собой квадрат с диагоналями 4. Площадь этого квадрата равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Ответ: {8}

Задание №5

Группируя слагаемые, получим:

$$(|x - 1|^2 + 1)(y^2 + 1) = 4y|x - 1|. \text{ Делим обе части на } y|x - 1|$$

($x = 1$ не является корнем уравнения так же как $y = 0$).

Получим $(|x - 1| + \frac{1}{|x-1|})(y + \frac{1}{y}) = 4$. Но при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Поэтому равенство возможно если $|x - 1| = 1, y = 1$. Следовательно, имеем $x = 0, x = 2$. Поэтому решение будет (0; 1) и (2; 1). Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: (0; 1) и (2; 1)

Задание №6

Обозначим $\arctg 2 + \arctg 3$ через α . Тогда $\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(\arctg 2 + \arctg 3) = \frac{\operatorname{tg}(\arctg 2) + \operatorname{tg}(\arctg 3)}{1 - \operatorname{tg}(\arctg 2) \cdot \operatorname{tg}(\arctg 3)} = \frac{2+3}{1-2 \cdot 3} = -1$. Теперь надо найти α , зная что $\operatorname{tg} \alpha = -1$.

Так как $\frac{\pi}{4} < \arctg 2 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < \arctg 3 < \frac{\pi}{2}$, то получаем что

$$\frac{\pi}{2} < \arctg 2 + \arctg 3 < \pi, \text{ т. е. } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \text{ А тогда } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

Задание №7

Пусть ABC данный треугольник, в котором AH – высота, BE – биссектриса угла B . Угол $BEA = 45^\circ$. Найти угол ENC .

Решение: Обозначим $\angle B = 2\alpha$. Покажем, что AC есть биссектриса внешнего угла A . Имеем:

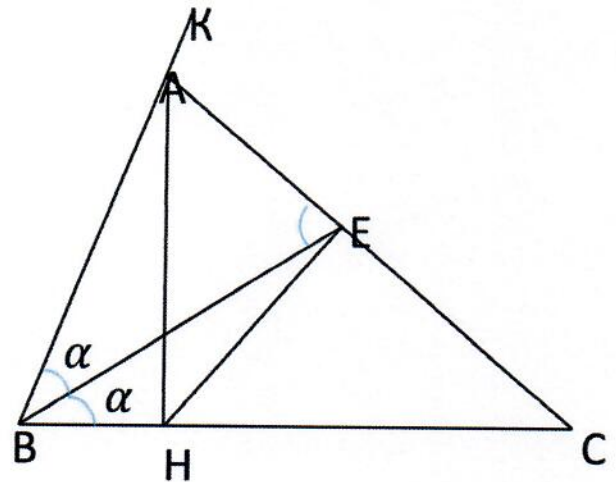
$$\begin{aligned} \angle HAC &= \angle BAC - \angle HAE. \text{ Но } \angle BAE \\ &= 180^\circ - \alpha - 45^\circ \\ &= 135^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\angle HAC = 135^\circ - \alpha - 90^\circ + 2\alpha = 45^\circ + \alpha$$

Поэтому

$\angle CAK = 135^\circ - \alpha - 90^\circ + 2\alpha = 45^\circ + \alpha$. Значит AC – биссектриса угла NAK . Через точку E проходит три прямые: AC , BE и HE . Поэтому HE – также биссектриса угла N . Значит $\angle ENC = 45^\circ$



Ответ: 45°

Задание №8

Решение:

Так как знаменатель дроби имеет вид $a - |a|$, где $a = 3 - 4x$, то при $a \geq 0$ он обращается в нуль, а при $a < 0$ он отрицателен. Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 3 - 4x < 0 \\ \log_7(19 - 16|x| \cdot x) - \log_{49}(1 - 4x)^2 \geq 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{4} \\ \log_7(19 - 16x|x|) \geq \log_7|1 - 4x| \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{4} \\ \log_7(19 - 16x^2) \geq \log_7(1 - 4x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{3}{4} \\ 19 - 16x^2 \geq 4x - 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 4x^2 + x - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$$

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$

Задание №9

Известно, что $|x - a|$ есть расстояние от т. x до точки a . Данное неравенство перепишем в виде: $|x - a^2| + |x - (2a - 2)| \leq 1$

Рассмотрим на числовой прямой точки $2a - 2$ и a^2 . Тогда слева стоит выражение равное сумме расстояний x от двух точек a^2 и $2a - 2$

Но $|a^2 - 2a + 2| = (a - 1)^2 + 1$; т.е. расстояние между точками a^2 и $2a - 2$

больше или равно 1. Тогда очевидно, что это неравенство будет выполняться тогда и только тогда когда $x \in [2a - 2, a^2]$ а длина этого отрезка равна 1, т.е.

$a = 1$ поэтому решение будет только при $a = 1$ $x \in [0, 1]$. При других a решений нет.

Ответ: $a = 1$ $x \in [0, 1]$. При других a решений нет.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
В.Н. Деснянский В.Н. Деснянский
«*28*» *каждого* _____ 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 2

Задание №1

Пассажир в метро спускается по движущемуся эскалатору за 24 секунды, если же он идет пешком по неподвижному эскалатору с той же скоростью, то спускается вниз за 42 секунды. За какое время пассажир спустится вниз, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?

Задание №2

Не пользуясь калькулятором определить какое число больше:
 3^e или e^3 , где e – основание натурального логарифма.
Ответ должен быть обоснован.

Задание №3

Решить уравнение:

$$\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x + \\ + \log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x$$

Задание №4

Найти площадь фигуры, заданной соотношением:

$$|y + 2| + |x - 3| = 4$$

Задание №5

Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 + y^2 = 1 + y + xy$$

Задание №6

Вычислить:

$$\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 3$$

Задание №7

На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника АВС взяты такие точки М и N, что ВС=ВМ, АС=АN.

Найти угол МСN.

Задание №8

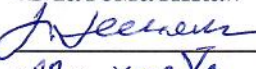
Решить неравенство:

$$\log_2(x \cdot 2^{x^2}) \geq 1 + 2x$$

Задание №9

Для любого a решить неравенство:

$$|x - 9a^2| \leq 2 - |6a - 3 - x|$$

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»
 В.Н. Деснянский
«18» ноября _____ 2023 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы

Вариант 2

Задание №1

Пусть x – скорость пассажира, y – скорость эскалатора. Обозначим за 1 длину пути эскалатора. По условиям задачи получаем $\frac{1}{x+y} = 24$,

$\frac{1}{x} = 42$. Делим второе уравнение на первое получим

$\frac{42}{24} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ или $x = \frac{4y}{3}$. Подставляем в первое уравнение и находим, что $\frac{1}{7y} = 8 \Rightarrow \frac{1}{y} = 56$.

Ответ: 56 сек

Задание №2

Функция $y = \frac{\ln x}{x}$, как известно, имеет наибольшее значение при $x = e$

Значит $\frac{1}{e} > \frac{\ln 3}{3} \Rightarrow e^3 > 3^e$

Ответ: первое число (слева) больше второго

Задание №3

Обозначим $\log_2 x = a, \log_3 x = b, \log_4 x = c, \log_5 x = d$. Тогда уравнение будет иметь вид:

$abcd = fdc + bcd + abd + acd$. Разделяем правую часть уравнения на левую получим:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5 = \log_x(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \Rightarrow x = 120$$

Так как $x=1$ является корнем уравнения, то

Ответ: $\{1; 120\}$

Задание №4

Сделаем линейную замену:

$Y = y + 2, X = x - 3$. Тогда в новой системе координат (x, y) имеем уравнение: $|X| + |Y| = 4$, т.е. симметрия по X и по Y . А тогда имеем квадрат с диагоналями 8. Его площадь равно 32.

Ответ: 32

Задание №5

Умножая обе части уравнения на 2 и, группируя слагаемые, получим

$$2x^2 + 2y^2 = 2 + 2y + 2xy \Rightarrow (x - y)^2 + (y - 1)^2 + x^2 = 3.$$

Слева имеем сумму квадратов трех целых чисел эта сумма равняется 3.

Это возможно только, если $(x, y) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ при $x = 0$ получим

$$y^2 - y - 1 = 0$$

Это уравнение не имеет целых решений. Пусть $y = 0$, тогда $x^2 = 1$, т.е.

имеем два решения: $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. При $x = 1$ находим

$$(1 - y)^2 \cdot 2 = 2$$

Отсюда $y = 0$ или $y = 2$. Имеем новое решение: $(1; 2)$. При $x = \pm 2$

очевидно решений нет. Также решений не будет при $y = -1$. И

наконец при $y = 2$ имеем $(x - 1)^2 = 0, x = 1$, т.е. имеем решение $(1; 2)$.

Ответ: $(1; 0), (-1; 0), (1; 2)$

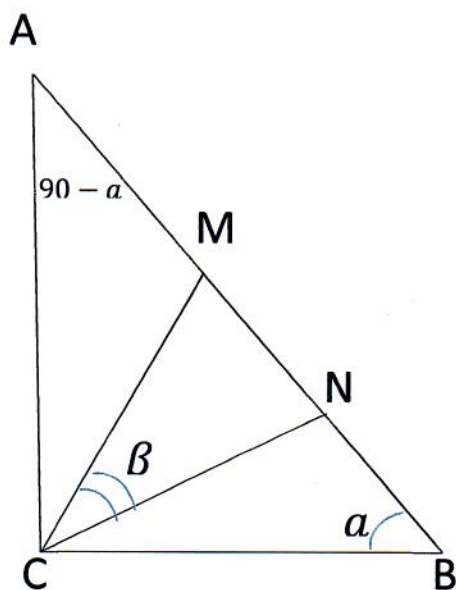
Задание №6

Пусть $\operatorname{arcsctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{arcsctg} 3 = \beta$. По свойствам функции $\operatorname{arctg} x$ углы $\alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$. Воспользуемся формулой $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. Тогда

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcsctg} 2 + \operatorname{arcsctg} 3) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{2 + 3} = 1. \text{ Отсюда}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задание №7



Пусть ABC прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, $BM = BC$, $AN = AC$

Решение

Пусть $\angle B = \alpha$, искомый угол обозначим β

Имеем:

$$\angle CNA = \angle ACN = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}. \text{ Далее}$$

$$\angle CMB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle BCM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\angle CNB = 180^\circ - \angle CNA = 135^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle NCB = 180^\circ - \alpha - 135^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{А тогда } \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$$

Ответ: 45°

Задание №8

ОДЗ $x > 0$. По свойству логарифма это равносильно неравенству $2^{x^2} \cdot x \geq 2^{1+2x} = 2 \cdot 2^{2x}$. Деля обе части неравенства 2^{2x} , получим:

$$2^{x^2-2x} \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2-1} \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \geq \frac{4}{x}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < x < 1$ функция $2^{(x-1)^2}$ будет убывающей, а при $x \geq 1$ – возрастающей функция $y = \frac{4}{x}$ на промежутке $(0; \infty)$ убывающая при $x = 2$ эти две функции равны. Поэтому ответ будет: $x \geq 2$

Задание №9

Имеем:

$$|x - 9a^2| + |6a - 3| \leq 2$$

Как известно, $|x - a|$ это расстояние от точки x до точки a . Рассмотрим точки на числовой прямой $6a - 3$ и $9a^2$ расстояние между этими точками равно $|9a^2 - 6a + 3| = (3a - 1)^2 + 2$, т.е. всегда больше или равно 2. Слева стоит сумма расстояний т. x должна лежать на промежутке от $6a - 3$ до $9a^2$. Чтобы неравенство имело решение нужно чтобы $a = \frac{1}{3}$ и тогда $x \in [-1; 1]$ будет решением. В других случаях x (при $a \neq \frac{1}{3}$) решений нет.

Ответ: при $a \neq \frac{1}{3}$ решений нет. При $a = \frac{1}{3}$, $-1 \leq x \leq 1$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

В.Н. Деснянский
«12» кабеля 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 3

Задание №1

Пассажир поезда знает, что на данном участке скорость этого поезда 40 км/час. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходит мимо окна в течение 3 секунд.

Определить скорость встречного поезда, если его длина равна 75 метров.

Задание №2

Не пользуясь калькулятором определить какое число больше:

$$2^{\sqrt{3}} \text{ или } 3^{\sqrt{2}}$$

Ответ обосновать.

Задание №3

Решить уравнение:

$$\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_6 x = \log_2 x \cdot \log_4 x + \log_2 x \cdot \log_6 x + \log_4 x \cdot \log_6 x$$

Задание №4

Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости соотношением:

$$|x| + |y - 1| \leq 4$$

Задание №5

Решить неравенство:

$$x^{2-\log_2^2(x)-\log_2(x^2)} > \frac{1}{x}$$

Задание №6

Вычислить:

$$\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$$

Задание №7

Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$$

Задание №8

В треугольнике ABC угол B равен 120° . Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы внутренних углов этого треугольника.

Найти $\angle A_1B_1C_1$

Задание №9

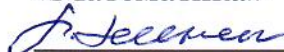
Для всех значений a решить неравенство:

$$|x - 4a^2| \leq 3 - |12a - 12 - x|$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю

«Математика»

 В.Н. Деснянский
«28» ноября 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД**

**Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы**

Вариант 3

Задание №1

Пусть скорость встречного поезда x м/сек. Скорость поезда, в котором ехал пассажир, $40 \frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{100}{9} \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Встречный поезд за 3 сек прошел расстояние $3x$ метров, а поезд с пассажирами - $3 \cdot \frac{100}{9} = 33\frac{1}{3}$ метра. Всего оба поезда прошли по условию 75 м, следовательно $33\frac{1}{3} + 3x = 75$ м, отсюда $x = 13\frac{8}{9} \frac{\text{м}}{\text{сек}} = \frac{125 \cdot 3600}{9 \cdot 1000} = 50$ км/час.

Ответ: 50 км/час

Задание №2

Имеем: $\sqrt{3} \ln 2 \vee \sqrt{2} \ln 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vee \frac{\ln}{\ln \sqrt{2}} = \log_2 3$. Далее: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \frac{5}{4}$ так как очевидно, что $1,5 < (\frac{5}{4})^2 = 1,5625$. Покажем, что $\log_2 3 > \frac{5}{4}$. Действительно: сравнивая числа 3 и $2^{5/4}$ получим, что $3^4 > 2^5$. Поэтому первое число меньше второго.

Задание №3

Очевидно, что $x = 1$ будет решением этого уравнения. Обозначим:

$\log_2 x = a$, $\log_4 x = b$, $\log_6 x = c$, тогда: $abc = ab + ac + bc$.

Деля уравнение на abc , получим: $1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_4 x} +$

$\frac{1}{\log_6 x} = \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 6 = \log_x 48$. Отсюда $x = 48$.

Ответ: $\{1; 48\}$

Задание №4

Сделаем замену: $y - 1 = Y$, тогда $|x| + |y| \leq 4$. В системе координат (x, Y) указанная область будет симметрична относительно x и Y и представляет область, ограниченную квадратом с диагоналями, равными 8. Поэтому площадь фигуры будет $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$

Задание №5

ОДЗ $x > 0$; Имеем: $x^{2 - (\log_2 x)^2} x^{-\log_2 x^2} > x^{-1}$. Возможны два случая: Когда $x > 1$, то $2 - (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x < -1$; Если $x < 1$, то получим $2 - (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x > -1$. Обозначим $\log_2 x = a$. Тогда либо $a^2 + 2a - 3 > 0$, либо $a^2 + 2a - 3 < 0$. Решая эти неравенства в соответствующих областях, получим ответ.

Ответ: $0 < x < \frac{1}{8}$; $1 < x < 2$

Задание №6

Обозначим $\alpha = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$.

Тогда

$$tga = tg(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

Так как углы $\arctg \frac{1}{2}$ и $\arctg \frac{1}{3}$ меньше $\frac{\pi}{4}$ то, так как $tga = 1$, то сумма этих углов равна $\frac{\pi}{4}$.

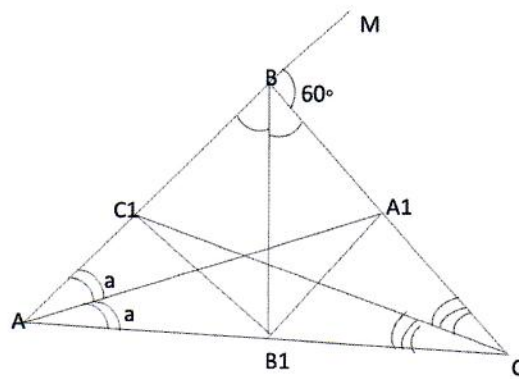
Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задание №7

Умножая равенство на 2, получим: $2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y = 0$. Следовательно: $(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Так как x и y – целые числа, а правая часть равенства равна 2, то равенство возможно лишь в трех случаях: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$. Проверка показывает, что эти числа будут решениями уравнения. А других нет.

Ответ: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$

Задание №8



Пусть ABC данный треугольник, AA_1 , BB_1 , CC_1 – биссектрисы.

Решение:

Заметим, что BA_1 – биссектриса смежного с углом ABB_1 ($\angle B_1BA_1 = \angle A_1BM = 60^\circ$), а AA_1 биссектриса угла AB и BB_1 , а также от прямых AB и AC , т.е. точка A_1 равноудалена от прямых BB_1 и B_1C , т.е. B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C . Точно также C_1B_1 биссектриса угла BB_1A . Таким образом, $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1B_1B + \angle BB_1A = \frac{1}{2}(\angle AB_1B + \angle BB_1C) = 90^\circ$.

Ответ: 90°

Задание №9

Как известно, $|x - x_0|$ есть расстояние т. x от точки x_0 . Переписав данное неравенство в виде: $|x - 4a^2| + |x - (12a - 12)| \leq 3$, мы отметим на числовой прямой точки $4a^2$ и $12a - 12$. Расстояние между этими

точками будет равно: $4\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + 3$, т.е. больше или равно 3. А тогда исходное неравенство будет выполняться лишь при $a = 3/2$. В этом случае решение будет $6 \leq x \leq 9$. Для других a решений нет.

Ответ: $a = 3/2$ $x \in [6; 9]$. При других a решений нет.